

# 第3回 測定の不確かさ勉強会

2018-3-13 14:00 ~ 16:00

講師: 渡辺英夫(計量士)

(公社)神奈川県計量協会 研修委員会

# 第3回 測定の不確かさ勉強会

2018-3-13 14:00 ~ 16:00

(公社)神奈川県計量協会 研修委員会

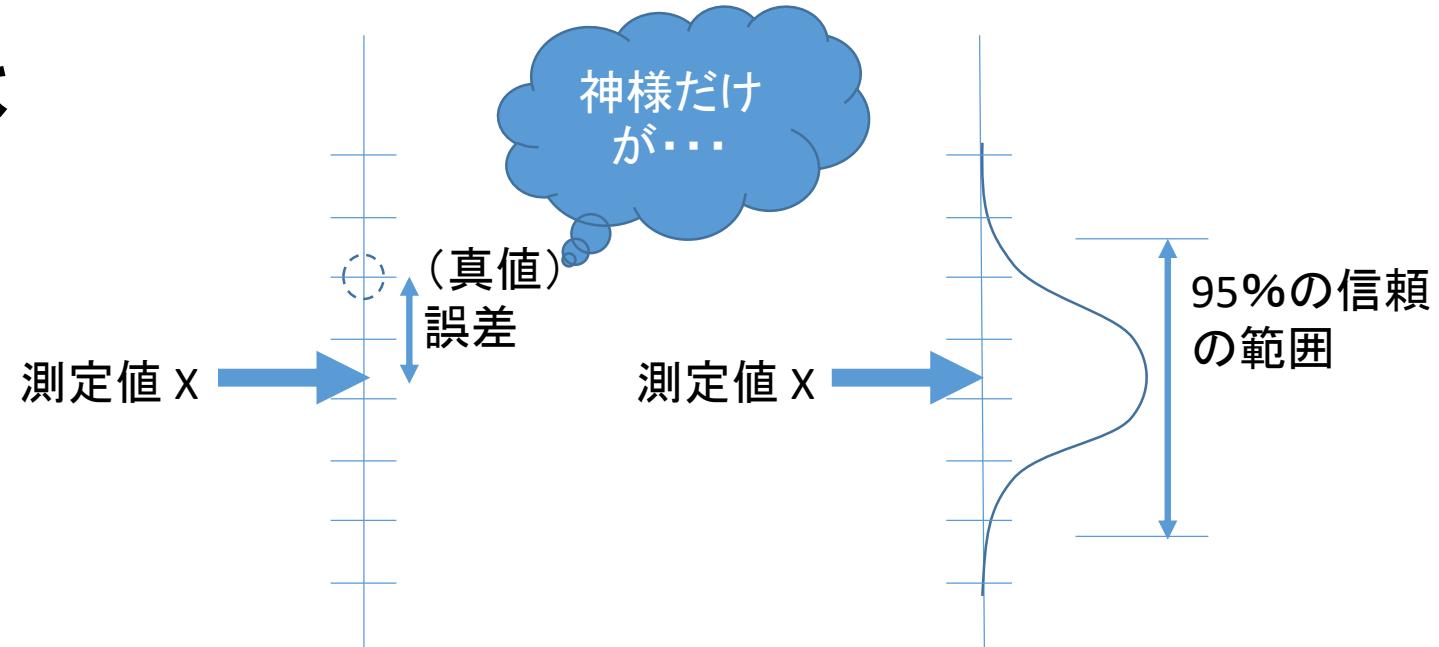
講師: 渡辺英夫(計量士)

- 1974 (株)日立製作所入社  
製品品質保証部門
- 1994 事業所内 計測器管理システム構築
- 1996 一般計量士登録(10810号)  
神奈川県計量協会・計量士会々員
- 2002 UKAS不確かさ研修プログラム受講  
その後、事業所でJCSS 時間・周波数 認定取得
- 2015 (株)日立製作所退職  
(現在、日立グループ会社でシニア社員)

# 目次

- 1 誤差と不確かさ
  - 2 不確かさの要因
  - 3 不確かさ成分のタイプ
  - 4 繰返し測定のばらつき
  - 5 平均の標準偏差
  - 6 分布の型と標準偏差
  - 7 バジェットシート
  - 8 不確かさの合成
  - 9 包含係数
  - 10 有効自由度
- 11 演習

# 1. 誤差と不確かさ



$$\text{誤差} \quad (\text{測定値}) - (\text{真値})$$



$$\text{測定値} = X \pm 2\sigma_x \dots \text{不確かさ} \quad \text{誤差、誤差の幅、標準誤差}$$

## 2. 不確かさの要因

- ・校正の不確かさ、安定性、測定条件(環境、組合せ)、分解能、校正データの補間、…  
電気\_熱起電力、インピーダンス、接続の再現性、…  
質量\_温度・温度変化、空気浮力、湿度、温度勾配、偏心、静電気、塵埃、磁性・磁気、…
- ・近似、丸め誤差、…

何に影響を受けるか？  
計測方法、計測器の構造と環境、数値の取扱い

### 3. 不確かさの成分のタイプ

タイプA: 統計的手段によって評価するもの

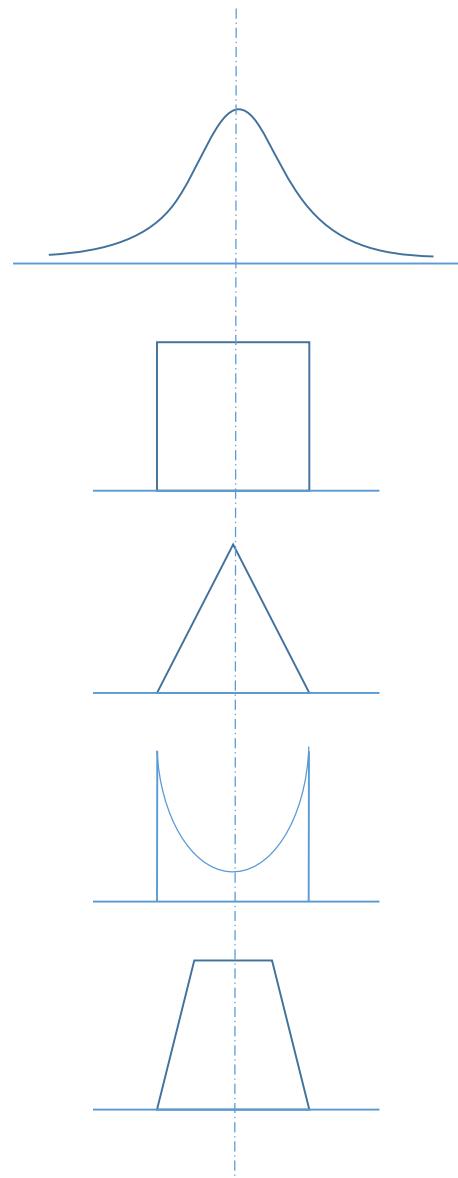
繰返し測定でのばらつき

分布の型 正規分布

タイプB: その他の手段で評価するもの

校正データ、カタログ値、経験値、…

分布の型 正規分布、矩形(一様)分布、三角分布、U字分布、台形分布



# 4. 繰返し測定のばらつき

繰返し  $n$  回測定

中心 → 平均値

ばらつき → 平均値の標準偏差

$$\text{標準偏差 } s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad , \text{ 分散 } s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{平均(値)の分散 } s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{n}$$

$$\Rightarrow \text{平均(値)の標準偏差 } s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

# 5. 何故、平均の標準偏差？

通常のデータ (A, B, C, ...) のばらつき

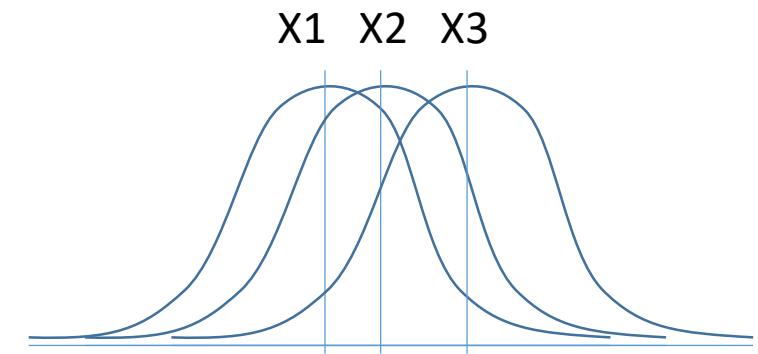
⇒ 平均値と標準偏差で把握しますが、

同じものを測って、同じであってほしいところ

ばらつく測定値  $X_1, X_2, X_3 \dots$

測定値は、その瞬間、瞬間の結果で同じでない。

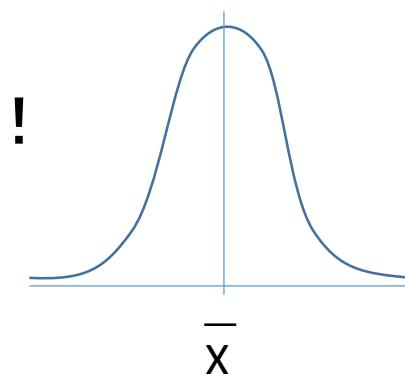
(表示の分解能が低ければ表面上、同じ数値)



本当の値はどこに → 主体は平均値で、そのバラツキ！

『平均(値)の標準偏差』

Standard deviation of the mean



# 平均の標準偏差？

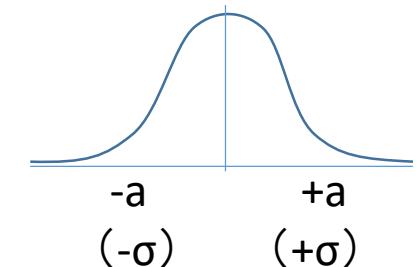
平均の標準偏差  $\sigma_{n-1}/\sqrt{n}$  をシミュレーション

平均値の標準偏差 (標準偏差を $\sqrt{N}$ で割ると「平均の標準偏差」になることの確認)									
	1	2	3	4	5	18	19	20	
①	0.6052372	0.4644208	0.8138032	0.4286527	0.5006591	0.6288773	0.4822612	0.5342149	
②	0.4501197	0.5140061	0.7168526	0.4056978	0.0605466	0.2001093	0.2902967	0.577431	
③	0.5692024	0.4502151	0.3914736	0.4087812	0.6785703	0.2579514	0.6967647	0.5952669	
④	0.9158847	0.8345579	0.6042823	0.3277045	0.5569665	0.5940031	0.4819476	0.2862747	
⑤	0.496834	0.6525853	0.6437816	0.2624092	0.4125293	0.6614101	0.5236288	0.4777767	
⑥	0.4831103	0.3167103	0.3789548	0.3959	0.329942	0.329978	0.4663326	0.423357	
⑦	0.588018	0.4834168	0.292984	0.6471015	0.6113185	0.7530176	0.3688597	0.5991569	
⑧	0.2546838	0.420594	0.539822	0.3259093	0.4525676	0.2942273	0.0964262	0.6310034	
⑨	0.709151	0.5928117	0.7047071	0.4093899	0.5517857	0.2728479	0.2611604	0.5072077	
⑩	0.5988149	0.6692925	0.3303547	0.5361002	0.4964446	0.3603012	0.5318083	0.4257857	
平均	0.5671056	0.539861	0.5417016	0.4147646	0.465133	0.4352723	0.4199486	0.5057475	→ 0.053859387
(標準偏差)	0.1725661	0.1493364	0.1829423	0.1095878	0.1732057	0.2012478	0.1696623	0.1056787	
平均の標準偏差	0.0545702	0.0472243	0.0578514	0.0346547	0.0547725	0.0636401	0.0536519	0.0334185	→ 0.054298029 平均

# 6. 分布の型と標準偏差

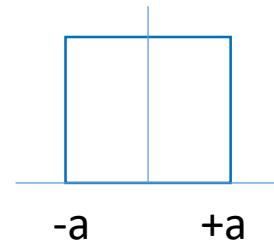
正規分布

$$\pm a$$



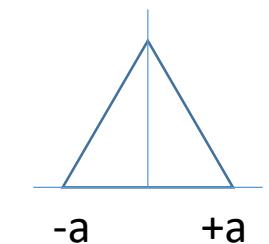
矩形(一様)分布

$$\pm a \rightarrow \pm a/\sqrt{3}$$



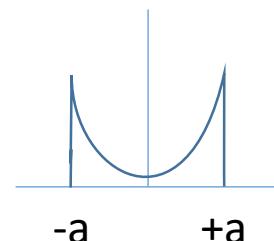
三角分布

$$\pm a \rightarrow \pm a/\sqrt{6}$$



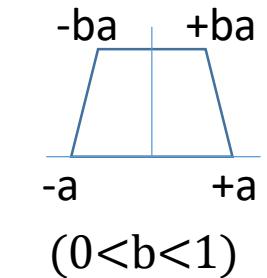
U字分布

$$\pm a \rightarrow \pm a/\sqrt{2}$$



台形分布

$$\pm a, b \rightarrow \pm a \sqrt{\frac{1+b^2}{6}}$$

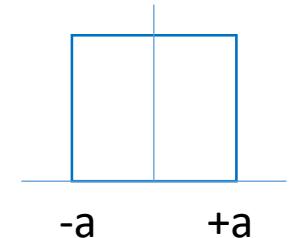


# 分布の型と標準偏差

## シミュレーション

矩形(一様)分布

$$\pm a \rightarrow \pm a/\sqrt{3}$$



矩形分布

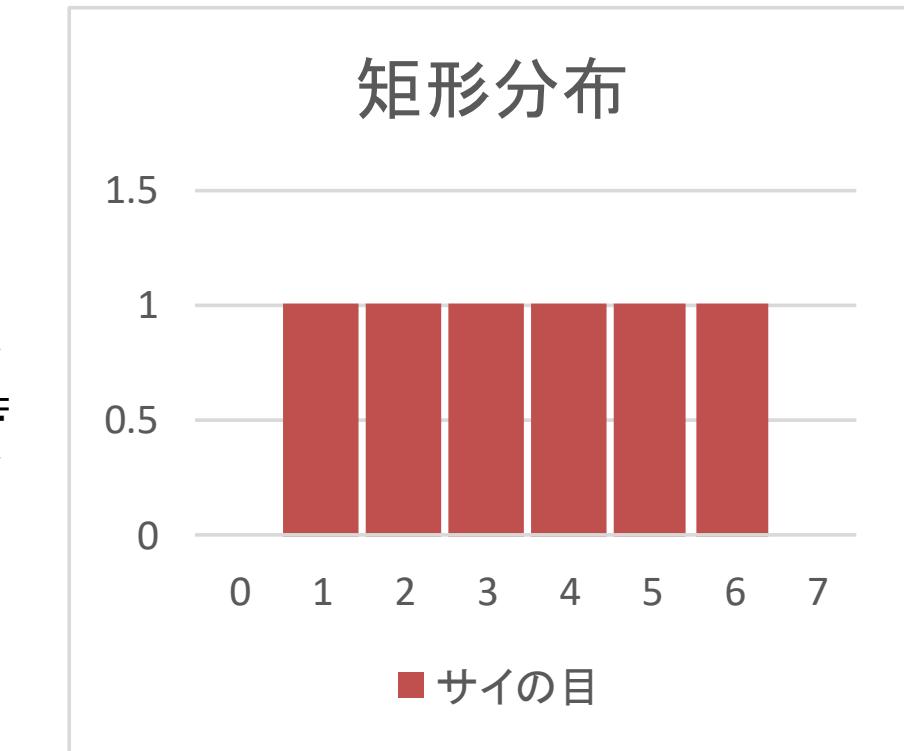
サイの目
1
2
3
4
5
6



サイの目	0	1	2	3	4	5	6	7
度数	0	1	1	1	1	1	1	0

平均 3.5  
標準偏差 ( $\sigma$ )  $n-1$  1.8708287

不確かさの幅 ( $\pm$ ) 3.2403709  
[不確かさの幅 ( $\pm$ )]  $\div \sqrt{3}$  = 1.870829

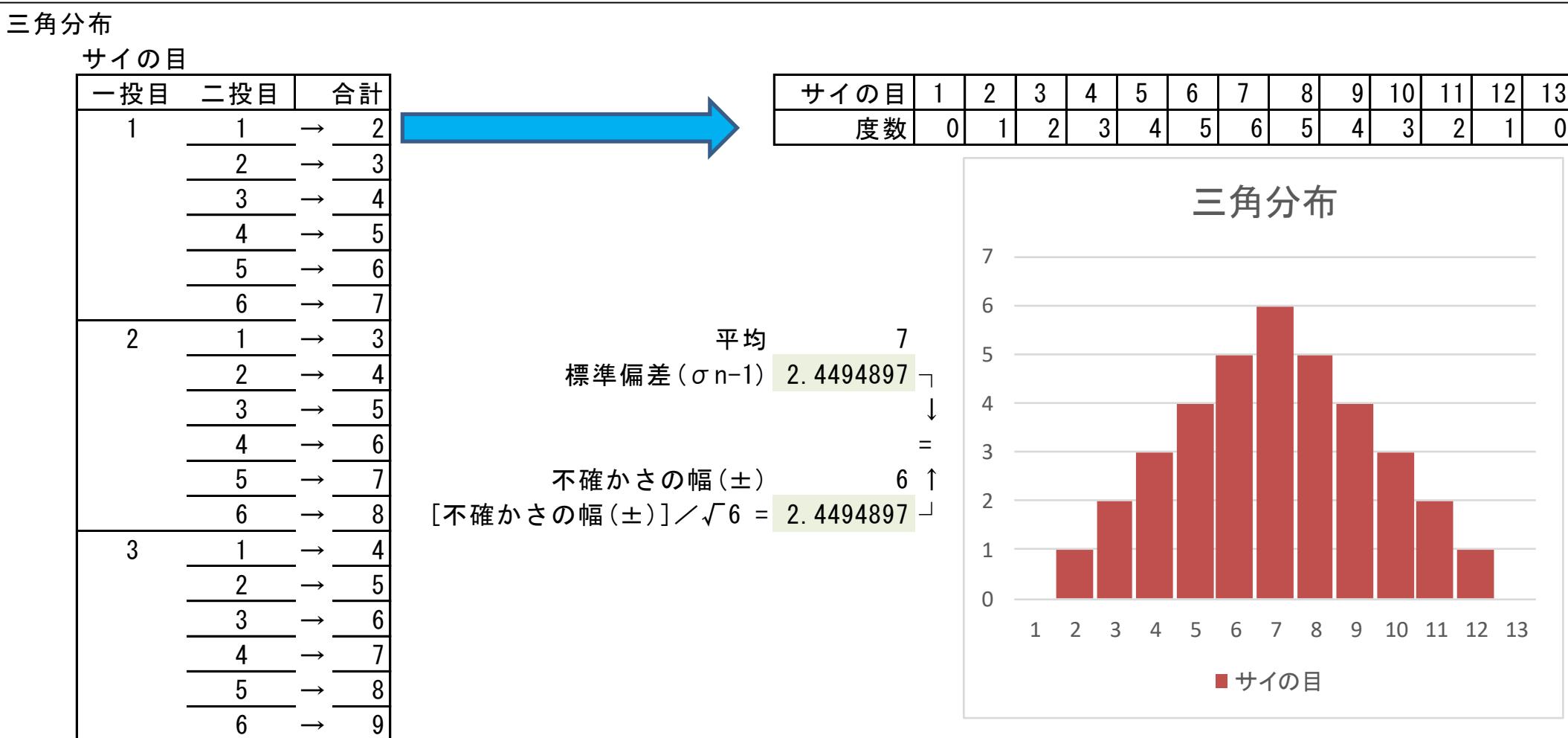
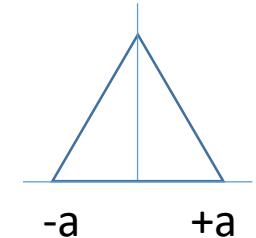


# 分布の型と標準偏差

## シミュレーション

### 三角分布

$$\pm a \rightarrow \pm a/\sqrt{6}$$

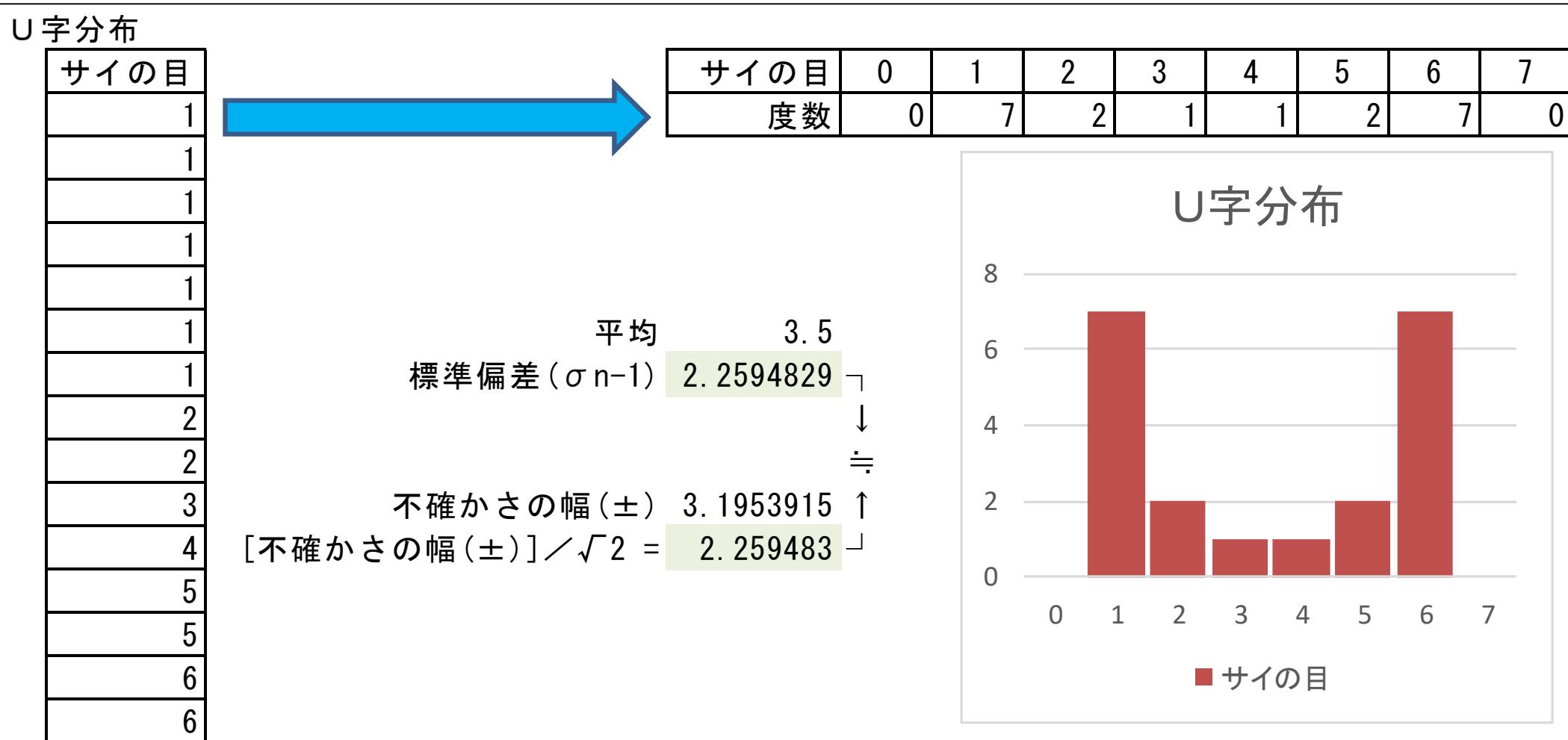
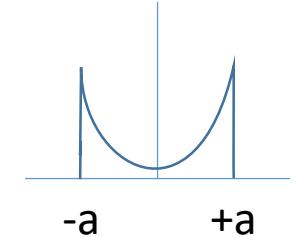


# 分布の型と標準偏差

## シミュレーション

### U字分布

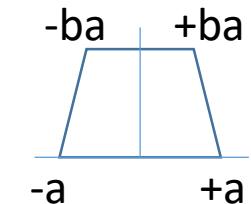
$$\pm a \rightarrow \pm a/\sqrt{2}$$



# 分布の型と標準偏差 シミュレーション

台形分布  $(0 < b < 1)$

$$\pm a, b \rightarrow \pm a \sqrt{\frac{1+b^2}{6}}$$



台形分布

サイの目
1
1
2
2
2
2
3
3
3
3
4
4
4



サイの目	0	1	2	3	4	5	6	7
度数	0	2	4	4	4	4	2	0

平均 3.5

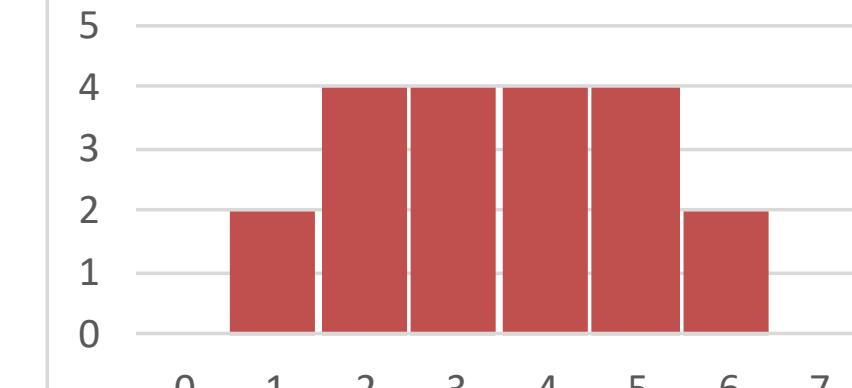
標準偏差 ( $\sigma$ )  $n-1$  1.5389675

不確かさの幅 ( $\pm b$ ) 0.4011324

不確かさの幅 ( $\pm a$ ) 3.5

$a \sqrt{(1+b^2)/6} = 1.539541$

台形分布



■ サイの目

# 7. バジェットシート

## [項目]

- ・不確かさの要因
- ・値(±)、
- ・タイプA/B
- ・除数\_1標準偏差への除数
- ・感度係数\_単位揃える係数
- ・不確かさへの寄与
- ・自由度
- ・合成標準不確かさ
- ・有効自由度
- ・包含係数
- ・拡張不確かさ

不確かさの算出例		測定値	(偏差)	(偏差) <sup>2</sup>				
1回目	5.05							
2回目	5.05							
3回目	5.00							
4回目	5.00							
5回目	5.05							
6回目	5.00							
7回目	5.00							
8回目	5.00							
9回目	5.05							
10回目	5.00							
平均					計			
標準偏差								
平均の標準偏差								

不確かさのバジェットシート								
不確かさの要因	値(±)	タイプ	確率分布	除数	感度係数	不確かさへの寄与[cm]	自由度	
繰返し測定[cm]		A	正規	1				
計測器の校正值[mm]	0.05	B	正規	2				
読み取り誤差[mm]	0.05	B	矩形	$\sqrt{3}$				
温度変動[°C] (鉄の膨張率 0.0000121 [1/K]) 10cm	5	B	矩形	$\sqrt{3}$				
温度測定の不確かさ[°C]	0.2	B	正規	2				
経年変化による影響[mm]	0.01	B	矩形	$\sqrt{3}$				
...		B		—				
合成標準不確かさ								
有効自由度								
包含係数								
結果			[cm]					
	拡張不確かさ		[cm]					
				k =	(信頼の水準約95%)			

## 8. 不確かさの合成

不確かさ成分の合成は、標準偏差の平方和のルート

$$S = \sqrt{Sa^2 + Sb^2 + Sc^2 + \dots} \quad (S^2 = Sa^2 + Sb^2 + Sc^2 + \dots)$$

$$u_c(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + u_3^2(y) + \dots}$$

# 9. 包含係数

信頼の水準約95% するために合成標準不確かさに掛ける係数  $k$   
(正規分布  $2\sigma$ )

表1：有効自由度  $\nu_{\text{eff}}$  に対する約95 %の信頼の水準をもつ区間の包含係数  $k$   $t$ 分布表 ( $t_{95}$ )

$\nu_{\text{eff}}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	$\infty$
$k$	12.71	4.3	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23	2.09	2.01	1.98	1.96

表2：有効自由度  $\nu_{\text{eff}}$  に対する約95 %の信頼の水準をもつ区間の包含係数  $k$   $t$ 分布表 ( $t_{95.45}$ )

$\nu_{\text{eff}}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	$\infty$
$k$	13.97	4.53	3.31	2.87	2.65	2.52	2.43	2.37	2.32	2.28	2.13	2.05	2.02	2.00

# 10. 有効自由度

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$$

Type-A の自由度 :  $v_A = (\text{繰返し測定回数}) - 1$

Type-B の自由度 :  $v_B = \infty \quad \text{無限大} \quad [v_i = v_A, v_{B1}, v_{B2}, v_{B3}, \dots]$

$$\Rightarrow v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum \frac{u_A^4(y)}{v_A}}$$

# バジェットシート

## [項目]

- ・不確かさの要因
- ・値(±)、
- ・タイプA/B
- ・除数\_1標準偏差への除数
- ・感度係数\_単位揃える係数
- ・不確かさへの寄与
- ・自由度
- ・合成標準不確かさ
- ・有効自由度
- ・包含係数
- ・拡張不確かさ

不確かさの算出例

	測定値	(偏差)	(偏差) <sup>2</sup>
1回目	5.05		
2回目	5.05		
3回目	5.00		
4回目	5.00		
5回目	5.05		
6回目	5.00		
7回目	5.00		
8回目	5.00		
9回目	5.05		
10回目	5.00		
平均			
標準偏差			
平均の標準偏差		計	

不確かさのバジェットシート

不確かさの要因	値(±)	タイプ	確率分布	除数	感度係数	不確かさへの寄与[cm]	自由度
繰返し測定[cm]		A	正規	1			
計測器の校正值[mm]	0.05	R	正規	2			
読み取り誤差[mm]	0.05	B	矩形	$\sqrt{3}$			
温度変動[°C] (鉄の膨張率 0.0000121 [1/K]) 10cm	0.05	B	矩形	$\sqrt{3}$			
温度測定の不確かさ[°C]	0.2	B	正規	2			
経年変化による影響[mm]	0.01	B	矩形	$\sqrt{3}$			
...		B		—			
合成標準不確かさ							
有効自由度							
包含係数							
結果							
拡張不確かさ	[cm]						
$k =$	[cm]						
	(信頼の水準約95%)						

# 11. 演習 ...繰返し測定の不確かさ

不確かさの算出例

	測定値	(偏差)	(偏差) <sup>2</sup>
1回目	5.05		
2回目	5.05		
3回目	5.00		
4回目	5.00		
5回目	5.05		
6回目	5.00		
7回目	5.00		
8回目	5.00		
9回目	5.05		
10回目	5.00		
平均			計
標準偏差			
平均の標準偏差		$1/\sqrt{n}$	$\sqrt{\sum/(n-1)}$

# バジェットシート

不確かさのバジェットシート

不確かさの要因	値 (±)	タイプ	確率分布	除数	感度係数	不確かさへの寄与 [cm]	自由度
繰返し測定 [cm]		A	正規	1	1		9
計測器の校正值 [mm]	0.05	B	正規	2			$\infty$
読み取り誤差 [mm]	0.05	B	矩形	$\sqrt{3}$			$\infty$
温度変動 [°C] (鉄の膨張率 0.0000121 [1/K]) 10cm	5	B	矩形	$\sqrt{3}$			$\infty$
温度測定の不確かさ [°C]	0.2	B	正規	2			$\infty$
経年変化による影響 [mm]	0.01	B	矩形	$\sqrt{3}$			$\infty$
...		B		—			
合成標準不確かさ $U_c$							
有効自由度 $\nu_{\text{eff}}$							
包含係数 $k$							
結果							
拡張不確かさ $U$							
$k =$							
						(信頼の水準約95%)	

# 文献

- JCSS公開文書\_技術適用指針・不確かさガイド、他

<http://www.nite.go.jp/iajapan/jcss/documents/index.htm#n03>

- TS Z0033「測定における不確かさの表現のガイド」

<http://www.jisc.go.jp/app/jis/general/GrvTSTRSearch.html>

→ TS/TR検索で「Z0033」(GUM)、「Z0032」(VIM)を検索

- 「測定における不確かさの表現のガイド」原文(国際度量衡局)

<http://www.bipm.org/en/about-us/> の「PUBLICATIONS」から「Guides in Metrology」を選択。

GUM:Uncertainty in Measurement. (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)、VIM:Vocabulary of Metrology. (International Vocabulary – Basic and General Concepts and Associated Terms)

- 「計測における不確かさの表現のガイド」日本規格協会(1996年)

## 蛇足

バジェットシートなど、Excelに計算式を仕組んでおくと便利ですが、  
数値は15桁が限界！

$111111111 \times 111111111$  は、12345678987654321を  
期待しますが、12345678987654300 となってしまいます。

$0.111111111 \times 0.111111111$  は、  
0.0123456789876543 となってしまいます。